Universidad
Tecnológica
Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2025

EXAMEN FINAL - 19/03/2025

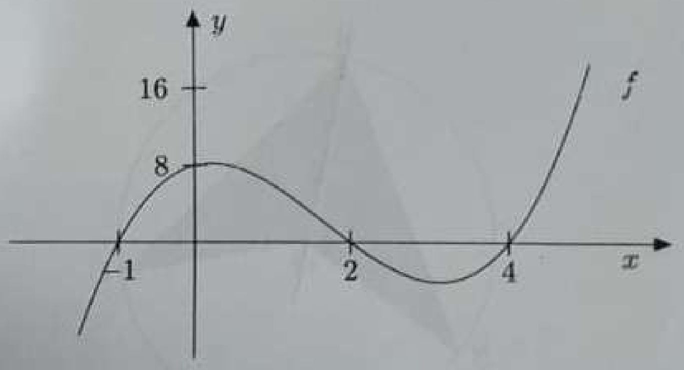
Apellido y Nombre: ....
Número de Documento: .... Especialidad:..

TEMA 3

1	2	3	4	5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto.
- Todas las respuestas deben estar justificadas.

EJERCICIO 1: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función polinómica de grado 3 cuya gráfica es:



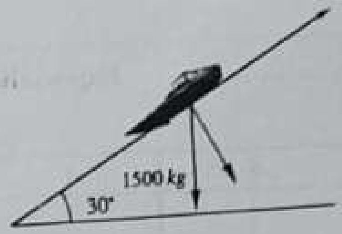
(a) Calcular el dominio natural de la función $g(x) = \log_{1/3}\left(\dfrac{4-x^2}{f(x)}\right)$.

(b) Hallar las soluciones enteras de la ecuación:

$$\log_{1/3}\left(\frac{4-x^2}{f(x)}\right) = \frac{1}{2}\log_{1/3}(81) - \log_{1/3}(18)$$

EJERCICIO 2: Un topógrafo determina que desde el punto P en el suelo el ángulo de elevación hasta la cima de una montaña mide 45°. Cuando él se aleja de la montaña hacia un punto Q a $250\,m$ del punto P, el ángulo de elevación es de 25°. ¿Cuál es la altura de la montaña? (Se supone que la base de la montaña y los dos puntos de observación están sobre una misma recta).

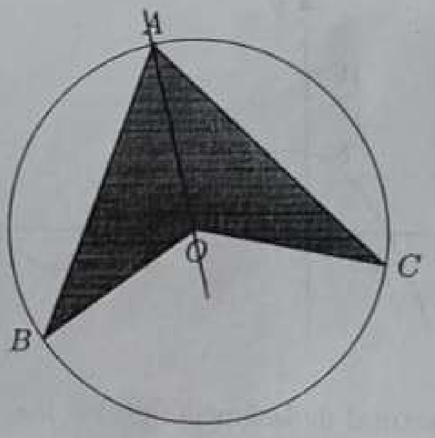
EJERCICIO 3: (a) Un bote de $1\,500\,kg$ de peso se encuentra en equilibrio en una rampa que forma un ángulo de $30°$ como se muestra en la figura. El vector que indica el peso del bote es la suma de los vectores $\vec{v}_1$ (paralelo a la rampa) y $\vec{v}_2$ perpendicular a la misma. Hallar los módulos de dichos vectores.



(b) Determinar los valores reales de A, B y C para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

EJERCICIO 4: Las cuerdas AB y AC miden $10\,cm$ y tienen sus extremos en la circunferencia de centro en O y radio $6\,cm$. Calcular el área de región sombreada.



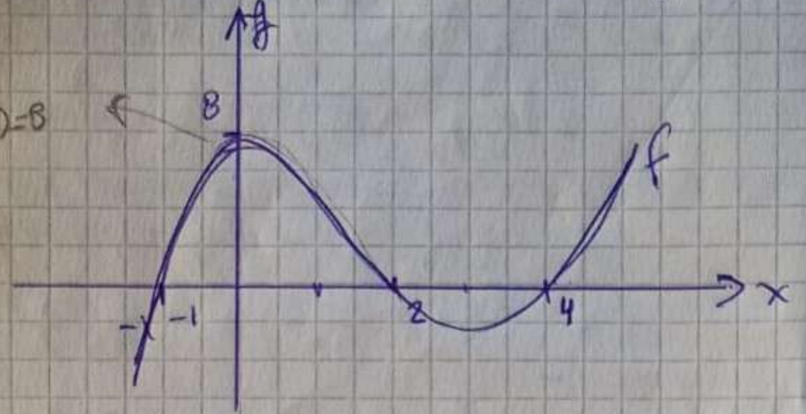
EJERCICIO 5: Dadas las funciones $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x-2+\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}(2x)$ y $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = \sqrt[3]{2x-1}+1$, se pide:

(a) Hallar la función $(f \circ g^{-1})(x)$.

(b) Calcular $(f \circ g^{-1})(1)$.

Final T.3	Seminario Universitario	HOJA N° FECHA 19-3-25

$\boxed{\text{EJ 1}}$ Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función polinómica de grado 3 cuya gráfica es,



a) Calcular el dominio natural de $g(x) = \log_{1/3}\left(\frac{4-x^2}{f(x)}\right)$

-1, 2 y 4 son raíces de $f \to f(x) = a(x+1)(x-2)(x-4)$

$f(0) = 8 = a(0+1)(0-2)(0-4) = a8 \to \boxed{a=1}$

$\boxed{f(x) = (x+1)(x-2)(x-4)}$

$4-x^2 = 2^2 - x^2$

$$g(x) = \log_{1/3}\left(\frac{4-x^2}{(x+1)(x-2)(x-4)}\right) = \log_{1/3}\left(\frac{(2-x)(2+x)}{(x+1)(x-2)(x-4)}\right) =$$

$$\log_{1/3}\left(\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+1)(x-2)(x-4)}\right) = \log_{1/3}\left(\frac{-x-2}{(x+1)(x-4)}\right)$$

$D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-x-2}{(x+1)(x-4)} > 0\right\}$ $\quad \frac{-x-2}{(x+1)(x-4)} > 0$

$-x-2 > 0 \ \wedge (x+1)(x-4) > 0 \quad \vee \quad -x-2 < 0 \ \wedge (x+1)(x-4) < 0$

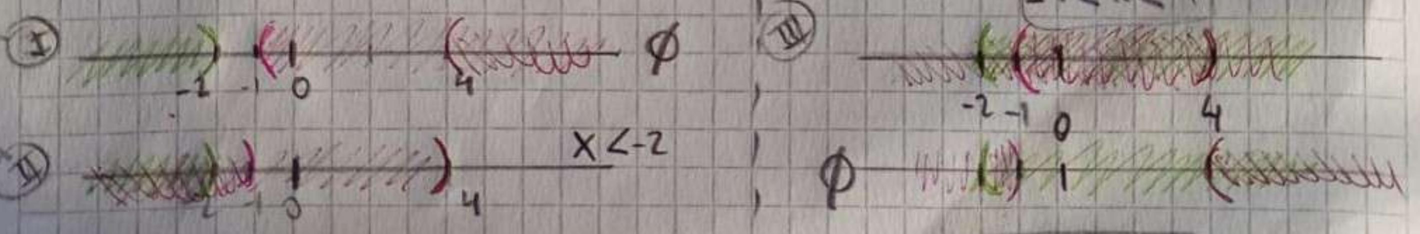
I) $x < -2 \ \wedge \ x+1 > 0 \ \wedge \ x-4 > 0$ $\quad$ ($x > -1$, $x > 4$)

II) $x < -2 \ \wedge \ x+1 < 0 \ \wedge \ x-4 < 0$ $\quad$ ($x < -1$, $x < 4$)

III) $-2 < x \ \wedge \ x+1 > 0 \ \wedge \ x-4 < 0$ $\quad$ ($x > -1$, $x < 4$)

IV) $-2 < x \ \wedge \ x+1 < 0 \ \wedge \ x-4 > 0$ $\quad$ ($x < -1$, $x > 4$)

$\boxed{-1 < x < 4}$



$\boxed{x < -2}$ $\qquad$ $\boxed{-1 < x < 4}$

$$\boxed{D(g) = (-\infty, -2) \cup (-1; 4)}$$

NOTA

1.b) Hallar las soluciones enteras de la ec.:

$$\underbrace{\log_{(1/3)}\left(\frac{4-x^2}{f(x)}\right)}_{g(x)} = \frac{1}{2}\log_{1/3}(81) - \log_{1/3}(18)$$

$$\log_{1/3}\left(\frac{-x-2}{(x+1)(x-4)}\right) = \log_{1/3}\left(81^{1/2}\right) - \log_{1/3}(18) =$$

$$= \log_{1/3}\left(\sqrt{81}\right) - \log_{1/3}(18) =$$

$$= \log_{1/3}(9) - \log_{1/3}(18) =$$

$$= \log_{1/3}\left(\frac{9}{18}\right) = \log_{1/3}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\log_{1/3}\left(\frac{-x-2}{(x+1)(x-4)}\right) = \log_{1/3}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{-x-2}{(x+1)(x-4)} = \frac{1}{2}$$

$$-x-2 = \frac{1}{2}(x+1)(x-4)$$

$$-2x-\cancel{4} = x^2 \overbrace{-4x+x}^{-3x} \cancel{-4}$$

$$0 = x^2-3x+2x \rightarrow x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

$$\boxed{x=0 \quad x=1}$$

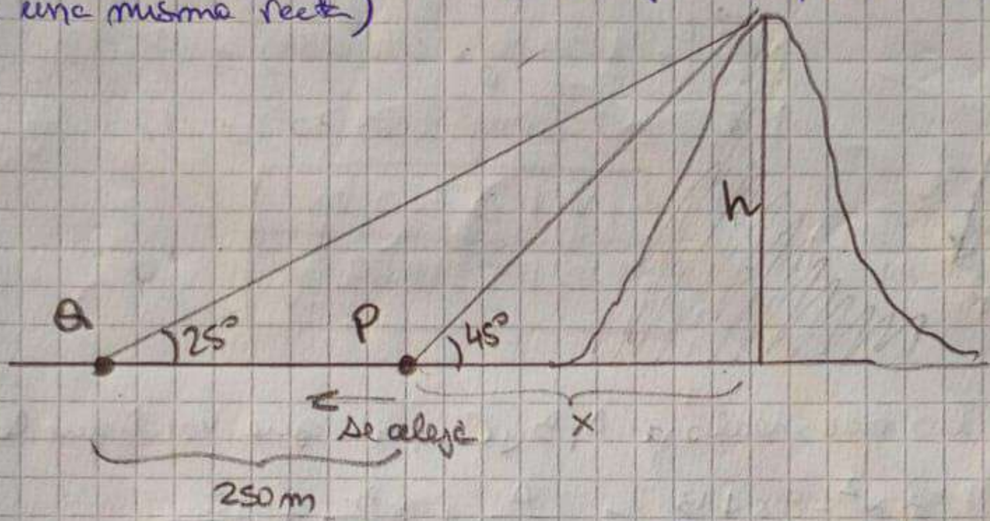
$$\boxed{S = \{0; 1\}}$$

Final T-3 | Seminario Universitario | HOJA N° | FECHA 19-3-25

Ej 2 Un topógrafo determina que desde el punto P en el suelo el ángulo de elevación hasta la cima de una montaña mide 45°
Cuando él se aleja de la montaña hacia un punto Q a 250m del punto P el ángulo de elevación es de 25°

¿Cuál es la altura de la montaña?

(Se supone que la base de la montaña y los dos puntos de observación están sobre una misma recta)



desde P: $tg(45°) = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{tg(45)}$ (I)

desde Q: $tg(25°) = \frac{h}{x + 250m} \rightarrow \underbrace{x + 250\,m = \frac{h}{tg(25)}}$

$x = \frac{h}{tg(25)} - 250\,m$ (II)

(I) y (II) $\frac{h}{tg(45°)} = \frac{h}{tg(25°)} - 250\,m$

$250m = \frac{h}{tg(25°)} - \frac{h}{tg(45°)} = h \overbrace{\left(\frac{1}{tg(25°)} - \frac{1}{tg(45°)}\right)}^{1,144506921}$

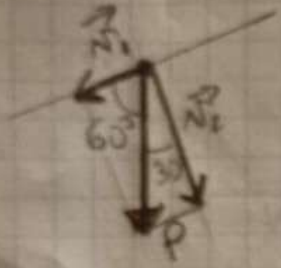
$\boxed{h = 286,13\ m}$

NOTA

B) 3 a) un bote de 1500 kg de peso se encuentra en equilibrio en una rampa que forma un ángulo de 30° como se muestra en la fig.

El vector que indica el peso del bote es la suma de dos vectores $\vec{N_1}$ (paralelo a la rampa) y $\vec{N_2}$ (perpendicular a la misma)

Hallar los módulos de dichos vectores



$$|\vec{N_1}| = 1500\,kg \cdot \cos(60^\circ) = 750\,kg = |\vec{N_1}|$$

$$|\vec{N_2}| = 1500\,kg \cdot \cos(30^\circ) = 1299\,kg = |\vec{N_2}|$$

$$\boxed{|\vec{N_1}| = 750\,kg}$$

$$\boxed{|\vec{N_2}| = 1299\,kg}$$

b) Determinar los valores reales de A, B y C para que verifique la sig. igualdad:

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)}{(x+3)(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2 \overbrace{-x+3x}^{2x} -3) + Cx + 3C}{(x+3)(x-1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx + 3C}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}$$

Entonces

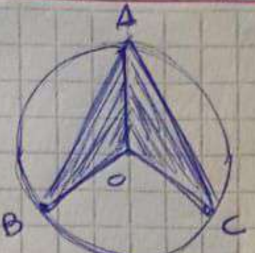
$$\begin{cases} x^2: A+B = 3 \\ x: -2A+2B+C = -8 \\ \#: A-3B+3C = 13 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} A = 4 \\ B = -1 \\ C = 2 \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -3 & 3 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_1 - F_3]{F_2 = 2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_2 - F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow A+B = 3 \\ \rightarrow 4B + C = -2 \\ \rightarrow 4C = 8 \end{array}$$

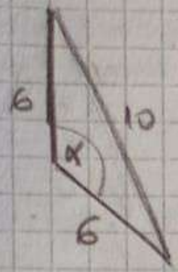
$$\boxed{C = 2}$$

Final tema 3 | Seminario Universitario | HOJA N° | FECHA 19-3-25

EJ 4 Las cuerdas AB y AC miden 10 cm y tienen sus extremos en la circunferencia de centro en O y radio 6 cm.



Calcular el área de la región sombreada



$$\rightarrow 10^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \times 6 \cdot 6 \cos(\alpha)$$

$$100 - 72 = -72\cos(\alpha) \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{28}{-72}$$

$$\boxed{\alpha = \arccos(-28/72)}$$

$$A_S = 2A_{\triangle} = \cancel{2} \times \frac{6 \times 6}{\cancel{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{-28}{72}\right)\right) \doteq 33{,}17\,cm^2$$

$$\boxed{A_S \doteq 33{,}17\,cm^2}$$

EJ 5 Dados las funciones $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x - 2 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)$ y $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ / $g(x) = \sqrt[3]{2x-1} + 1$ se pide:

acotar el dominio para que sea función porque arctg es una inversa

a) Hallar la función $(f \circ g^{-1})(x)$

Hallo $g^{-1}(x)$:

$$y = \sqrt[3]{2x-1} + 1$$

$$y - 1 = \sqrt[3]{2x-1}$$

$$(y-1)^3 = 2x - 1$$

$$(y-1)^3 + 1 = 2x$$

$$\frac{(y-1)^3 + 1}{2} = x \rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = \frac{(x-1)^3 + 1}{2}}$$

$$f \circ g^{-1}(x) = f(g^{-1}(x)) = f\left(\frac{(x-1)^3+1}{2}\right) = \cancel{4}^{2}\left(\frac{(x-1)^3+1}{\cancel{2}}\right) - 2 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\cancel{2} \cdot \frac{(x-1)^3+1}{\cancel{2}}\right) =$$

$$= 2\left((x-1)^3 + 1\right) - 2 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left((x-1)^3 + 1\right) = 2(x-1)^3 \cancel{+2} \cancel{-2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left((x-1)^3 + 1\right)$$

$$\boxed{(f \circ g^{-1})(x) = 2(x-1)^3 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left((x-1)^3 + 1\right)}$$

b) Calcular $(f \circ g^{-1})(1)$

$$f(g^{-1}(1)) = \underbrace{2(1-1)^3}_{0} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\overbrace{(1-1)^3}^{0} + 1\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

$$\boxed{(f \circ g^{-1})(1) = \pi/8}$$

NOTA